



NÁVRH NELINEÁRNÍHO MODELU LETADLA

Model vytvořený pro řízení a simulace v
Simulinku (MATLAB)

ZÁKLADNÍ POHYBOVÉ ROVNICE

- Silová rovnice (translační a rotační složka)

$$\vec{F} = \frac{dh}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = m\dot{v} + m[\vec{\Omega} \times \vec{v}]$$

F ... vektor síly [N]

h ... hybnost [kg.m/s]

m ... hmotnost [kg]

v ... vektor lineární rychlost [m/s]

Ω ... vektor úhlové rychlost [°/s]

- Momentová rovnice (translační a rotační složka)

$$\vec{M} = \frac{dH}{dt} = \frac{d(I\Omega)}{dt} = I \frac{d\Omega}{dt} + \Omega \frac{dI}{dt} = I\dot{\Omega} + [\vec{\Omega} \times I\vec{\Omega}]$$

M ... vektor momentu [N.m]

H ... moment hybnosti [kg.m²/s]

I ... moment setrvačnosti [kg.m²]



DEFINICE POLOHOVÝCH ÚHLŮ A ÚHLŮ OFUKOVÁNÍ

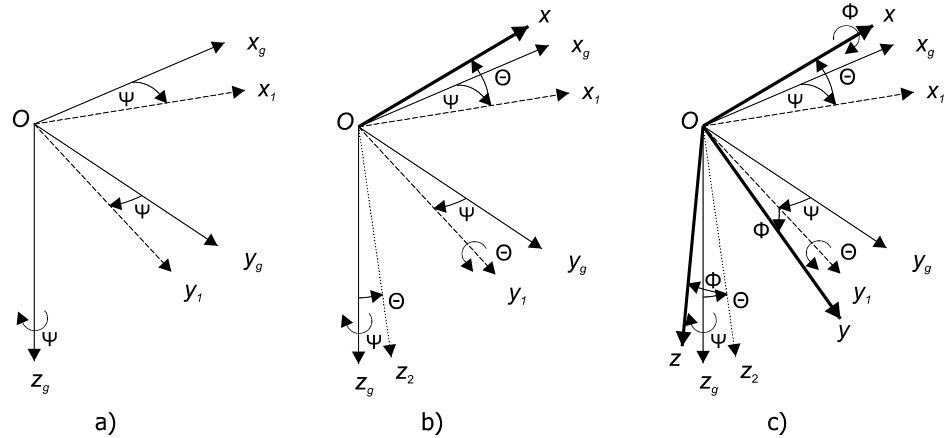
Polohové (Eulerovy) úhly

rotace kolem os

z - kurzový úhel Ψ (yaw angle)

y - podélný sklon θ (pitch angle)

x - příčný náklon ϕ (bang/roll angle)



vektor úhlových rychlostí $\vec{\Omega} = [p \quad q \quad r]^T$

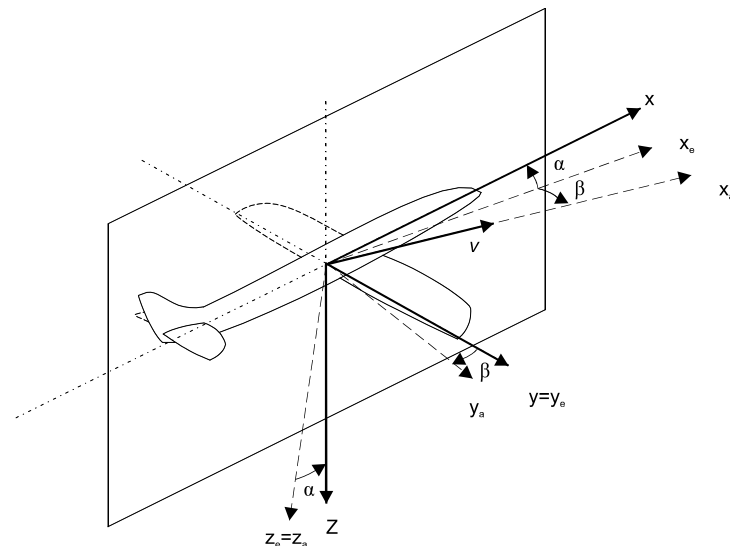
vektor lineárních rychlostí $\vec{v} = [u \quad v \quad w]^T$

celková rychlost $V_T = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$

Úhly ofukování

úhel náběhu $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{w}{u}\right)$ angle of attack

úhel vybočení $\beta = \sin^{-1}\left(\frac{v}{V_T}\right)$ sideslip angle



NELINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ TVAR

- Složkový tvar silové rovnice

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} + m[\vec{\Omega} \times \vec{v}] = m \begin{bmatrix} \dot{u} + q \cdot w - r \cdot v \\ \dot{v} + r \cdot u - p \cdot w \\ \dot{w} + p \cdot v - q \cdot u \end{bmatrix}$$

- Gravitační síla

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} -mg \cdot \sin \theta \\ mg \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \\ mg \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi \end{bmatrix}$$

- Celkový tvar silové rovnice

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} X - mg \cdot \sin \theta \\ Y + mg \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \\ Z + mg \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{u} + q \cdot w - r \cdot v \\ \dot{v} + r \cdot u - p \cdot w \\ \dot{w} + p \cdot v - q \cdot u \end{bmatrix}$$

- Momentová rovnice

$$\vec{M} = I\dot{\vec{\Omega}} + [\vec{\Omega} \times I\vec{\Omega}]$$

- Složkový tvar

$$M = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \det \begin{vmatrix} & i & & j & & k \\ & p & & q & & r \\ p \cdot I_{xx} - q \cdot I_{xy} - r \cdot I_{xz} & q \cdot I_{yy} - p \cdot I_{xy} - r \cdot I_{yz} & r \cdot I_{zz} - p \cdot I_{xz} - q \cdot I_{yz} \end{vmatrix}$$

- Celkový tvar silové rovnice

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \cdot I_{xx} + q \cdot r \cdot (I_{zz} - I_{yy}) - (p \cdot q + \dot{r}) \cdot I_{xz} \\ \dot{q} \cdot I_{yy} + p \cdot r \cdot (I_{xx} - I_{zz}) + (p^2 - r^2) \cdot I_{xz} \\ \dot{r} \cdot I_{zz} + p \cdot q \cdot (I_{yy} - I_{xx}) + (q \cdot r - \dot{p}) \cdot I_{xz} \end{bmatrix}$$

AERODYNAMICKÉ SÍLY

○ Aerodynamické síly

- odpor $D = \bar{q} \cdot S \cdot c_D$
- vztlak $L = \bar{q} \cdot S \cdot c_L$
- bočná síla $Y = \bar{q} \cdot S \cdot c_Y$

○ Aerodynamické momenty

- klonivý moment $L = \bar{q} \cdot S \cdot b \cdot c_l$
- klopivý moment $M = \bar{q} \cdot S \cdot \bar{c} \cdot c_m$
- stáčivý moment $N = \bar{q} \cdot S \cdot b \cdot c_n$

\bar{q} ... dynamický tlak $\bar{q} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2$

S ... plocha křídla

b ... rozpětí křídla

\bar{c} ... střední geometrická tětiva křídla



BEZROZMĚRNÉ KOEFICIENTY A ŘÍDICÍ PRVKY LETADLA

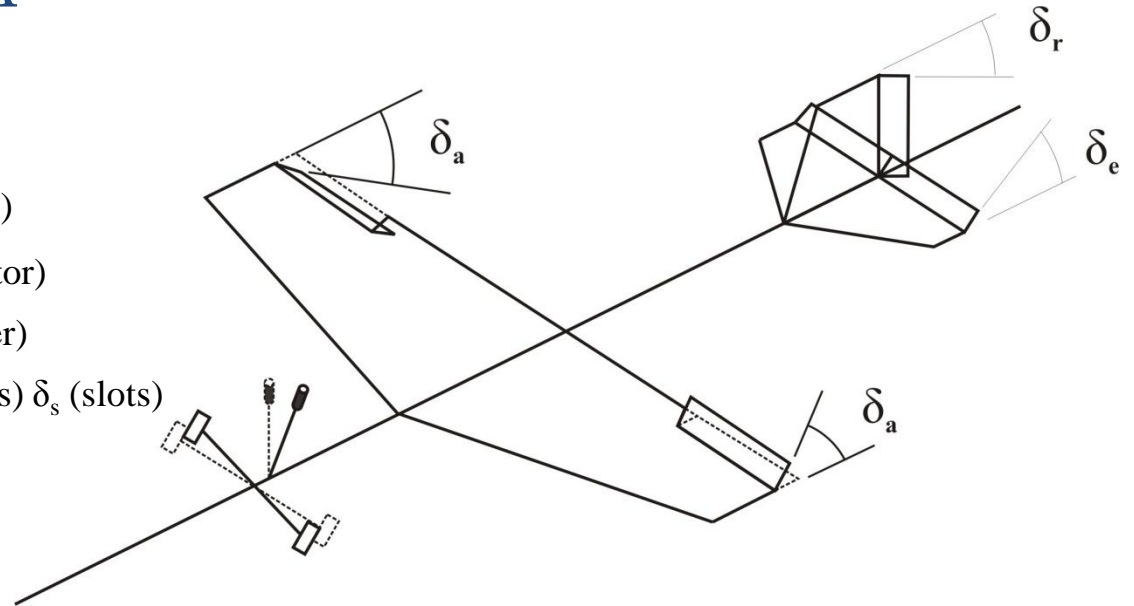
○ Řízení letadla

výchylka křidélek - δ_a (aileron)

výchylka výškovky - δ_e (elevator)

výchylka směrovky - δ_r (rudder)

výchylka klapek a slotů - δ_f (flaps) δ_s (slots)



○ Bezrozměrné koeficienty

$$c_D = c_D(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, p, q, r, \delta_e, \delta_a, \delta_r, \delta_f, \delta_s, \dots)$$

$$c_L = c_L(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, p, q, r, \delta_e, \delta_a, \delta_r, \delta_f, \delta_s, \dots)$$

$$c_Y = c_Y(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, p, q, r, \delta_e, \delta_a, \delta_r, \delta_f, \delta_s, \dots)$$

$$c_l = c_l(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, p, q, r, \delta_e, \delta_a, \delta_r, \delta_f, \delta_s, \dots)$$

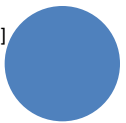
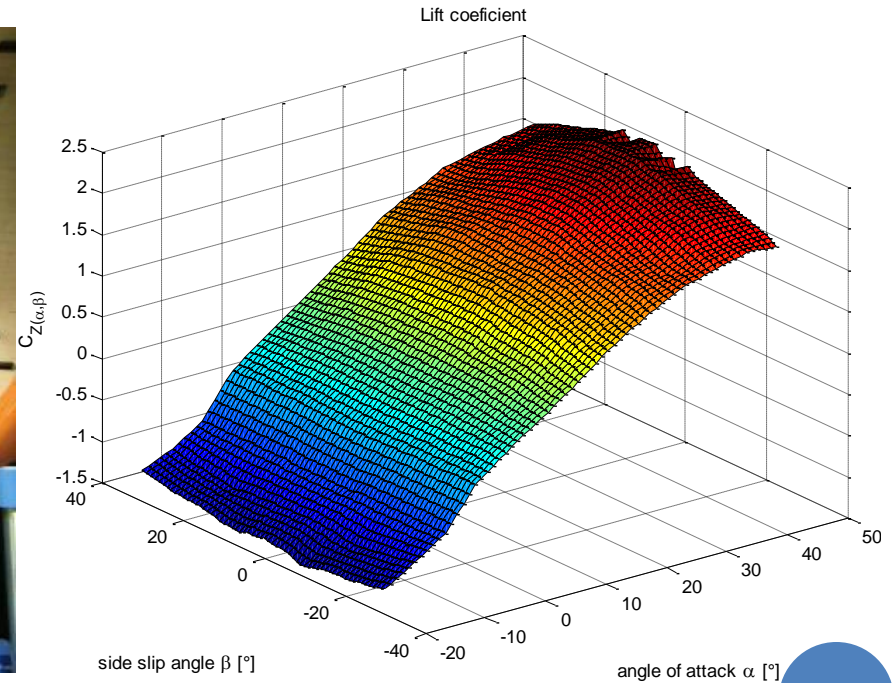
$$c_m = c_m(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, p, q, r, \delta_e, \delta_a, \delta_r, \delta_f, \delta_s, \dots)$$

$$c_n = c_n(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, p, q, r, \delta_e, \delta_a, \delta_r, \delta_f, \delta_s, \dots)$$



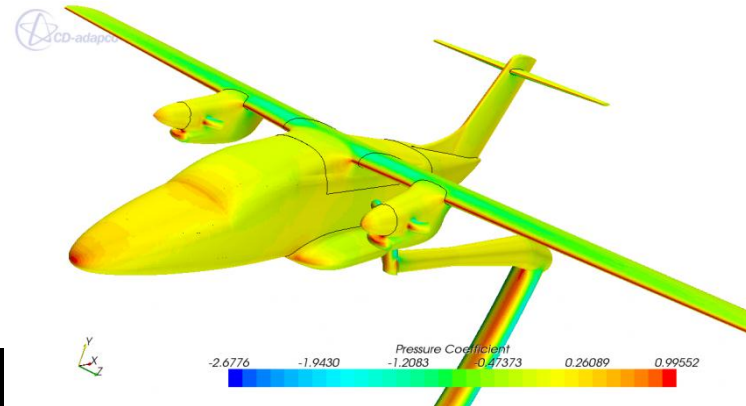
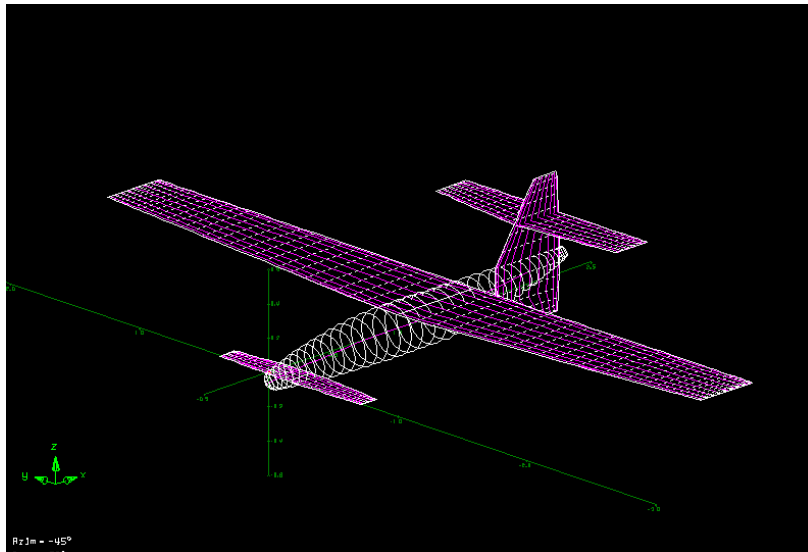
AERODYNAMICKÉ KOEFICIENTY

- Měření pomocí tenzometrických vah
 - Model umístěn v aerodynamickém tunelu
 - Nastavení manipulátoru simuluje změnu α a β
 - Simulace výchylek řídicích ploch



AERODYNAMICKÉ KOEFICIENTY

- Výpočetní metody
 - CFD (Computational fluid dynamics)
3D výpočetní software pro numerické výpočty aerodynamických vlastností letounu
 - Panelové metody
Potenciální proudění



AERODYNAMICKÉ KOEFICIENTY

○ Letové měření

- Identifikace letových parametrů na reálném objektu

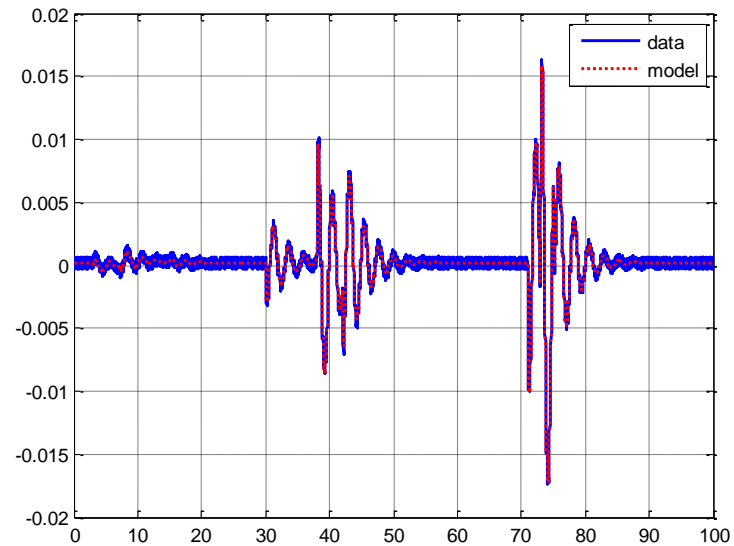
- Různé metody identifikace

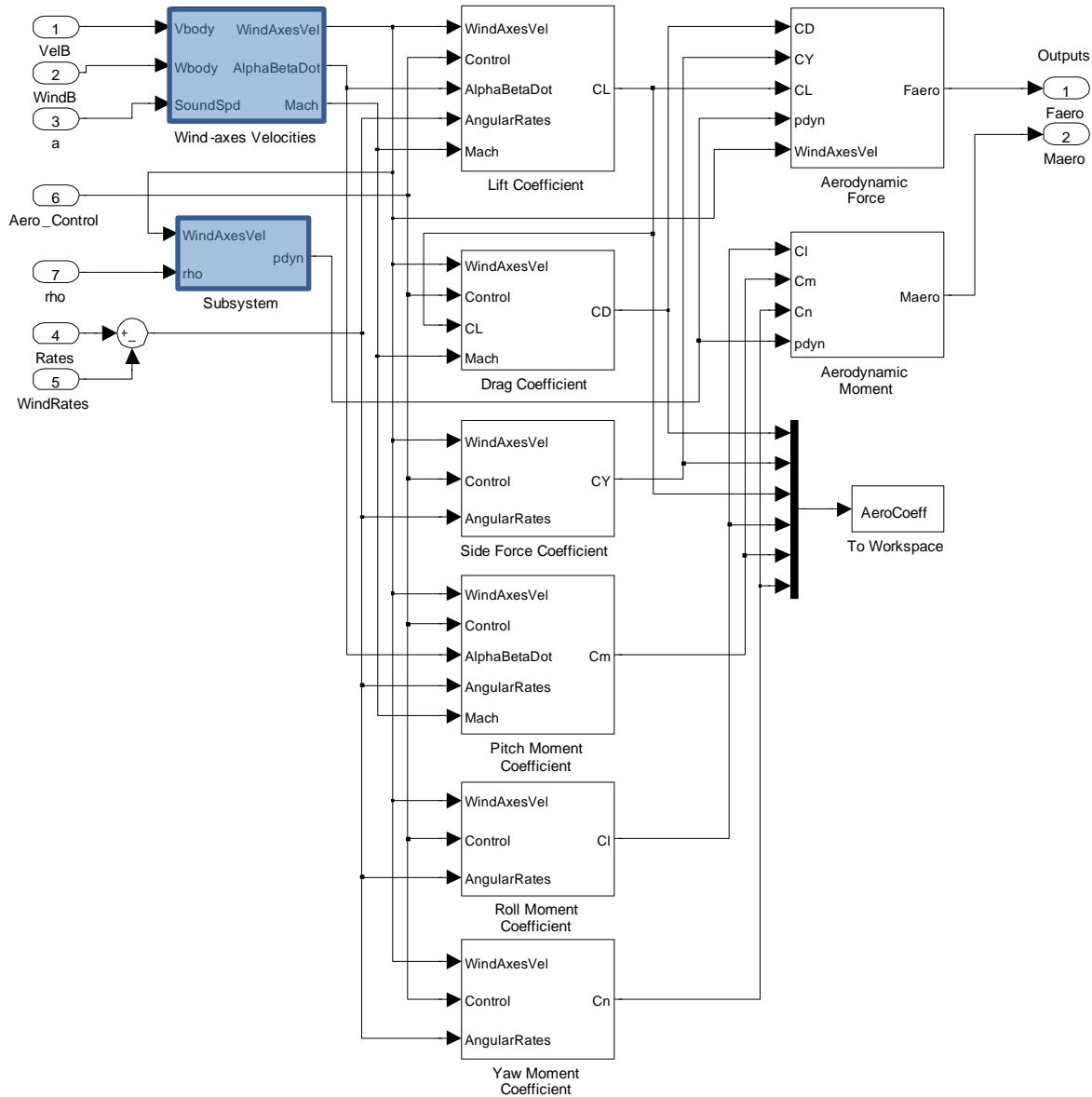
Metoda nejmenších čtverců

metody s využitím apriorní informace

Rekurzivní metody

```
=====
Aircraft parameter identification
-----
Parameter      Th          s (Th)      |to|
-----
C_x0            1.97e-004   1.73e-011   11412871.5
C_xbeta         6.41e-002   1.12e-007   572594.7
C_xp            -9.53e-002  5.36e-006   17790.0
C_xr            -1.15e-001  6.17e-007   185744.4
C_xd_ail        -1.66e-002  7.65e-007   21684.0
C_xd_rud        -6.25e-002  2.41e-007   259252.9
s = gama       2.94e-004
R^2, %         98.5
-----
```





REALIZACE VÝPOČTU AERODYNAMICKÝCH ROVNIC 1/3

- Rychlost letu

$$V_T = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

- Úhel náběhu

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{w}{u}\right)$$

- Úhel vybočení

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{v}{V_T}\right)$$

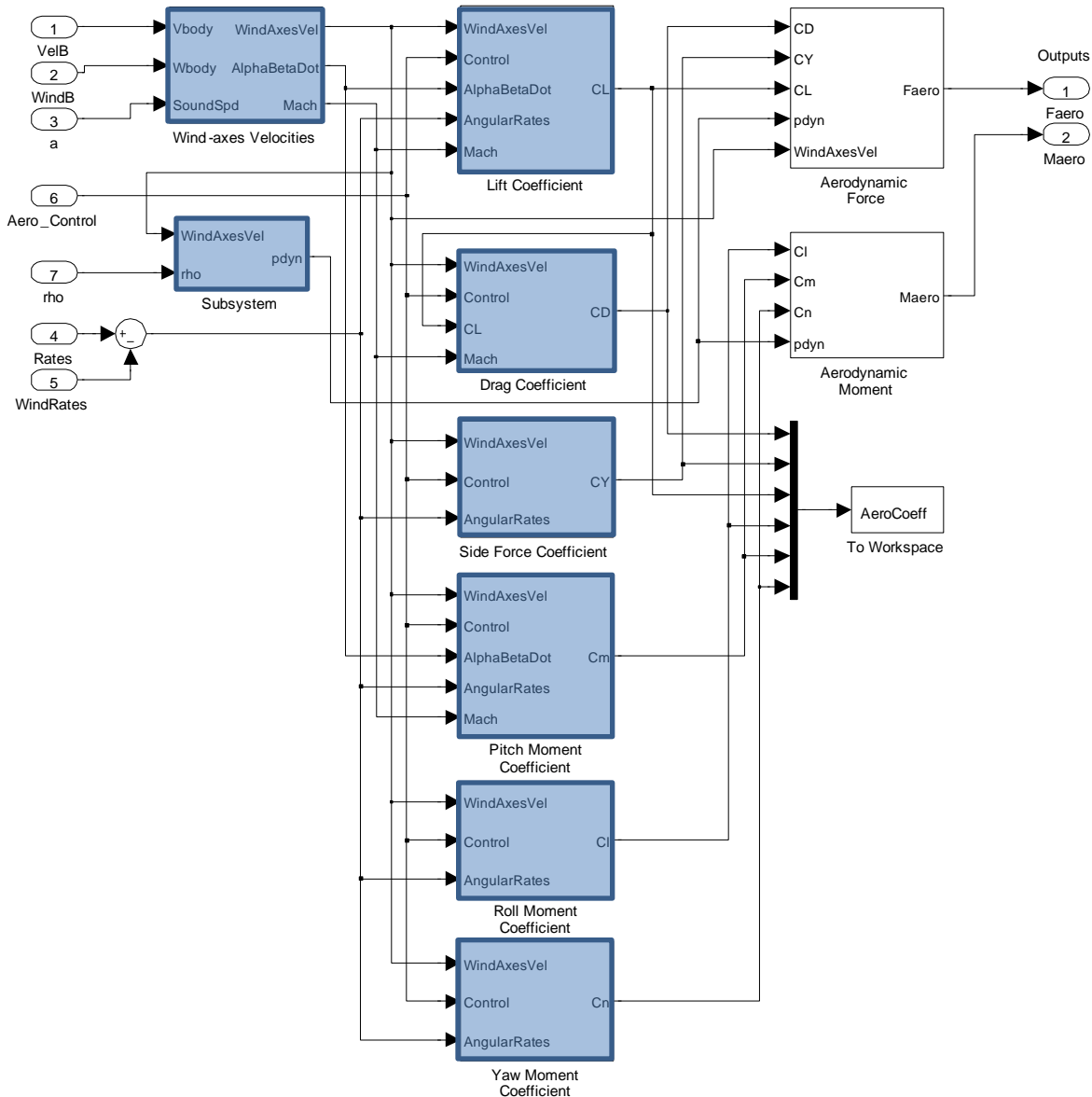
- Machovo číslo

$$M = \frac{a}{V_T}$$

- Dynamický tlak

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_T^2$$





REALIZACE VÝPOČTU AERODYNAMICKÝCH ROVNIC 2/3

- Vztakový součinitel

$$c_L = c_{L_0} + c_L^\alpha \cdot \alpha + c_L^{\delta_f} \dots$$

- Odporový součinitel

$$c_D = c_{D_0} + \frac{(c_{D_0} - c_{D_0})^2}{\pi e AR} \dots$$

- Boční součinitel

$$c_Y = c_Y^\beta \cdot \beta + c_Y^{\delta_a} \cdot \delta_a \dots$$

- Klopivý součinitel

$$c_m = c_{m_0} + c_m^\alpha \cdot \alpha + c_m^{\delta_f} \dots$$

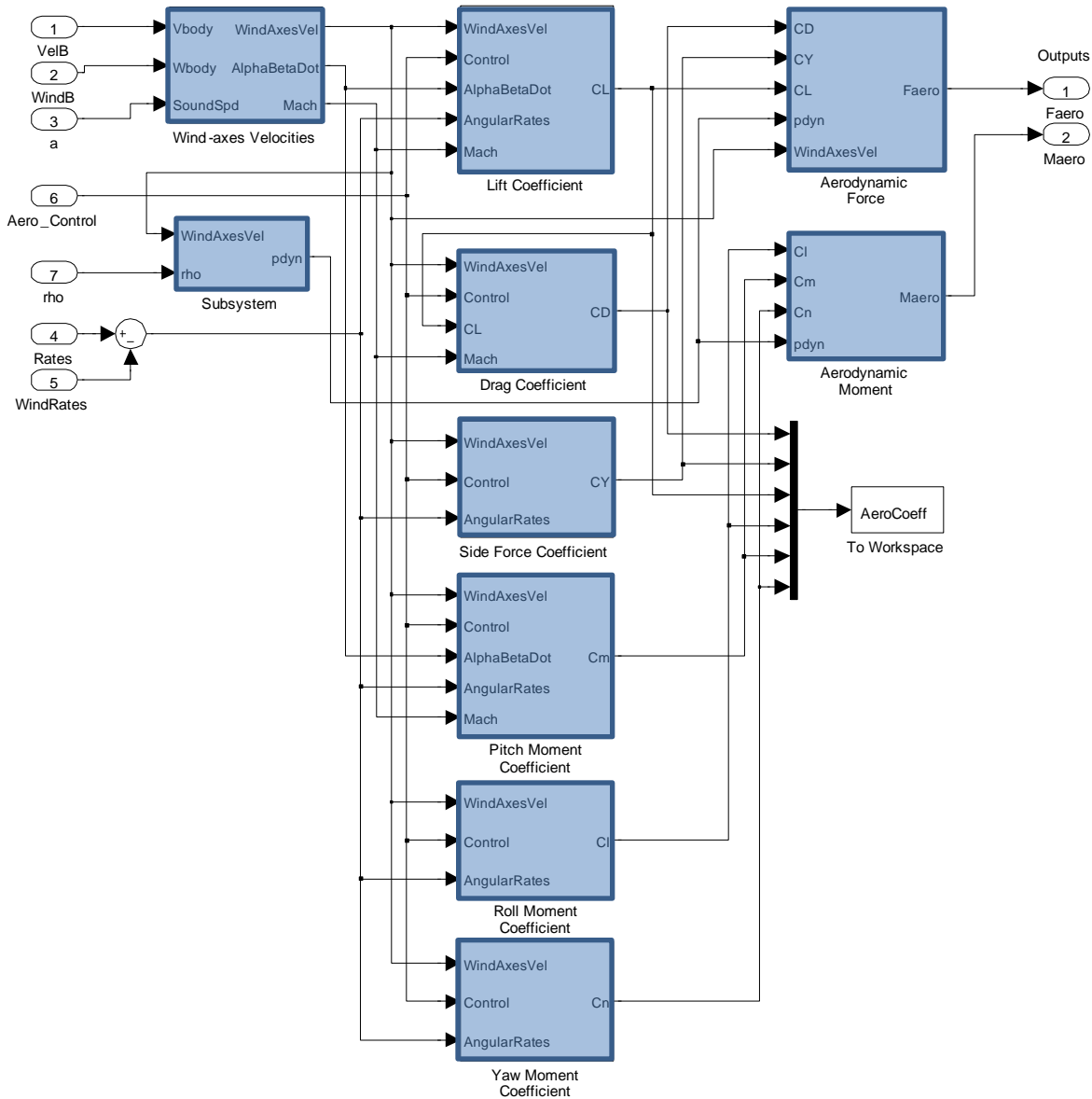
- Klonivý součinitel

$$c_l = c_l^\beta \cdot \beta + c_l^{\delta_a} \cdot \delta_a \dots$$

- Zatáčivý součinitel

$$c_n = c_n^\beta \cdot \beta + c_n^{\delta_a} \cdot \delta_a \dots$$





REALIZACE VÝPOČTU AERODYNAMICKÝCH ROVNIC 3/3

○ Aerodynamické síly:

$$Y = \bar{q} \cdot S \cdot c_Y$$

$$L = \bar{q} \cdot S \cdot c_L$$

$$D = \bar{q} \cdot S \cdot c_D$$

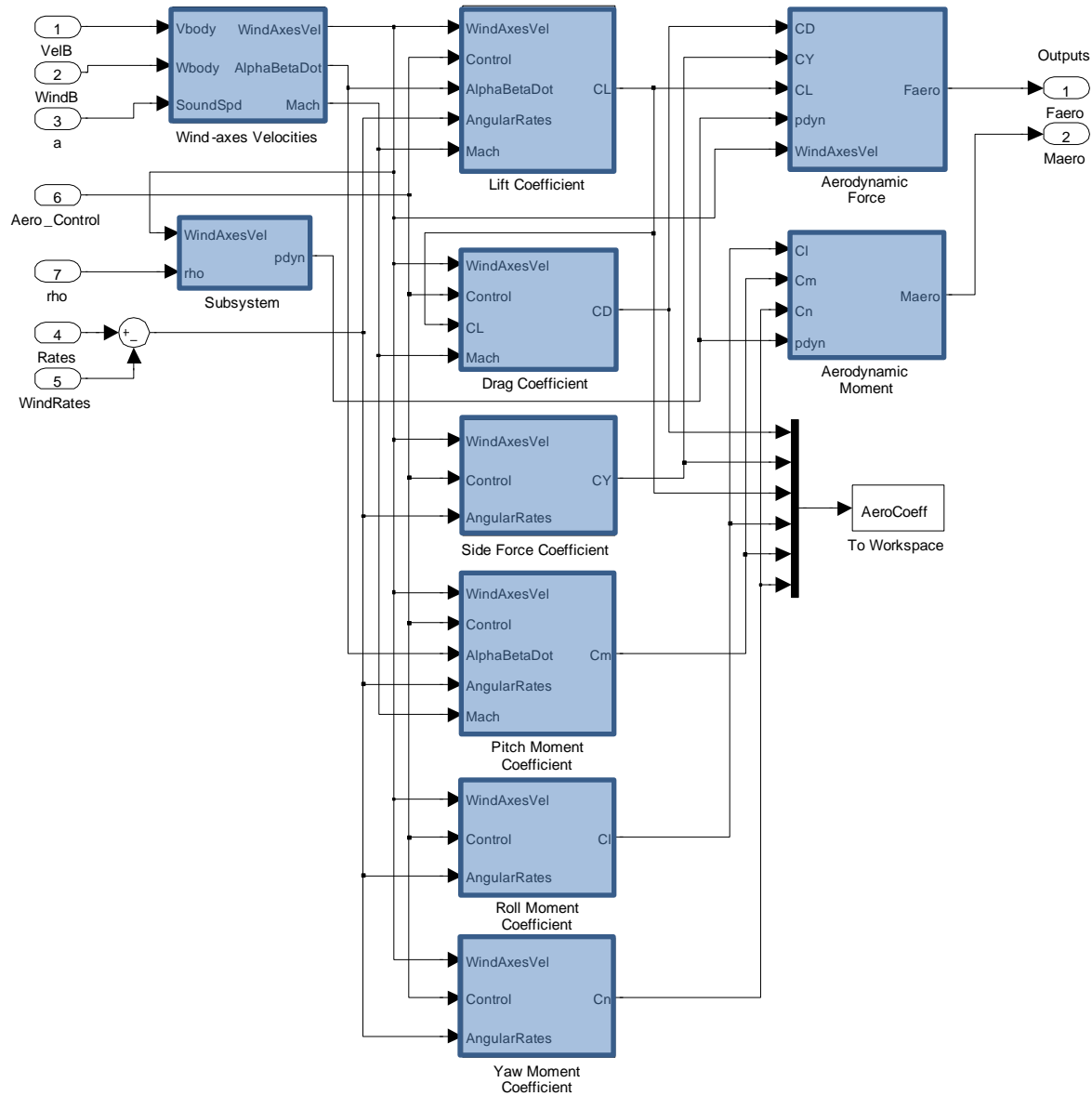
○ Aerodynamické momenty:

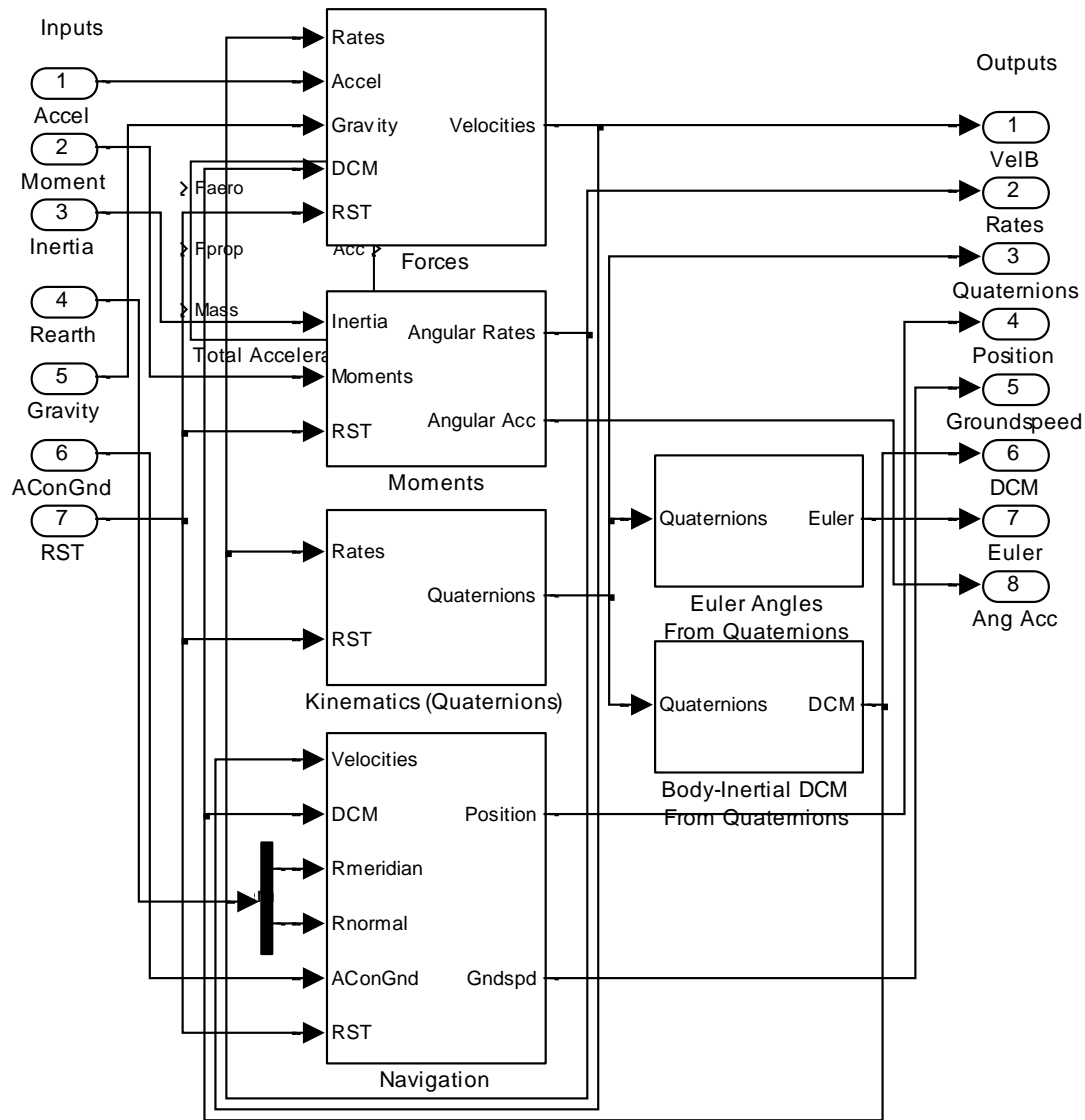
$$L = \bar{q} \cdot S \cdot b \cdot c_l$$

$$M = \bar{q} \cdot S \cdot \bar{c} \cdot c_m$$

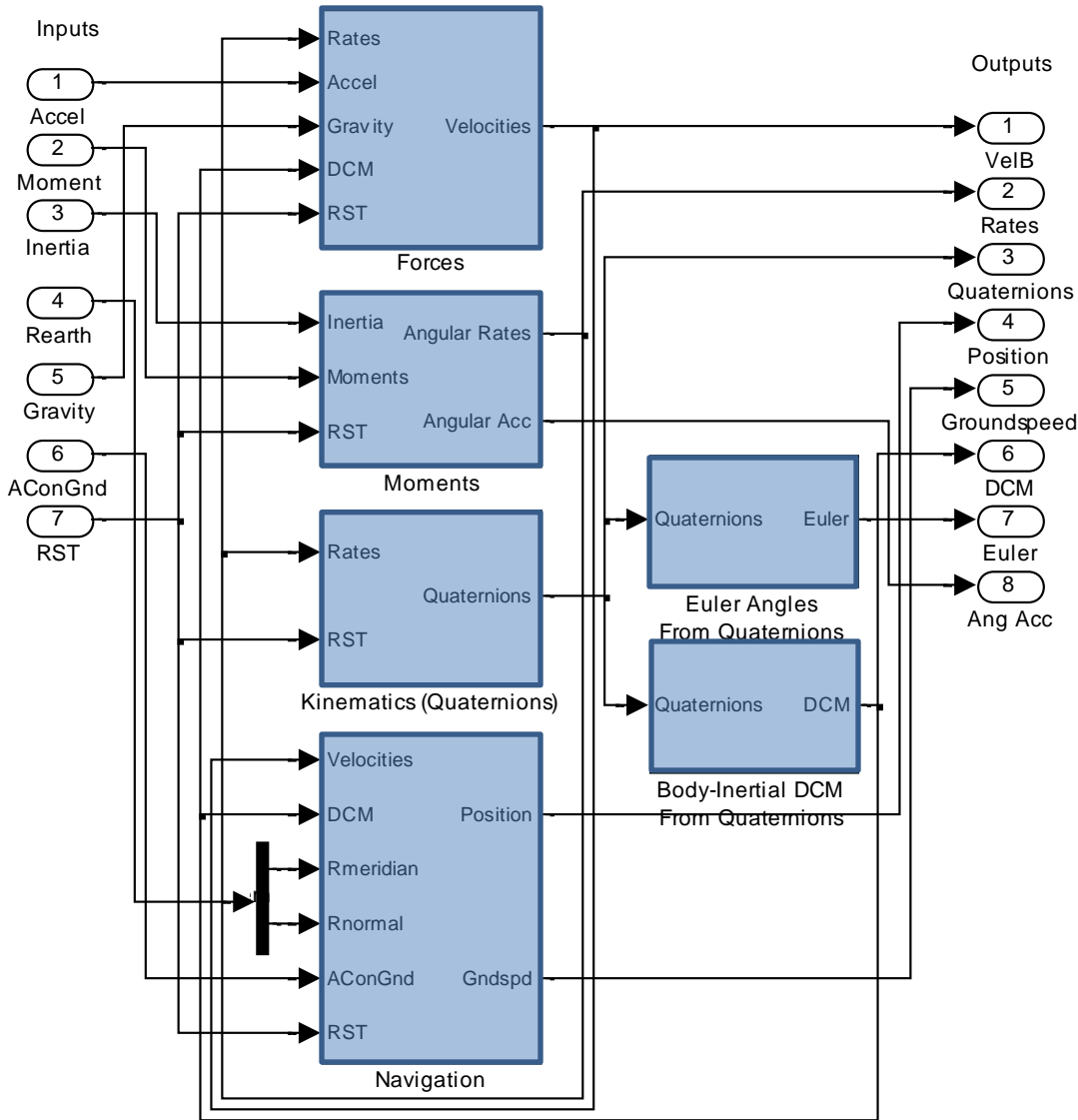
$$N = \bar{q} \cdot S \cdot b \cdot c_n$$







ROVNICE POHYBU



◦ lineární rychlosti

$$\dot{u} = r \cdot v - q \cdot w + g_x + a_x$$

$$\dot{v} = p \cdot w - r \cdot u + g_y + a_y$$

$$\dot{w} = q \cdot u - p \cdot v + g_z + a_z$$

◦ úhlové rychlosti

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \cdot I_{xx} + q \cdot r \cdot (I_{zz} \dots \\ \dot{q} \cdot I_{yy} + p \cdot r \cdot (I_{xx} \dots \\ \dot{r} \cdot I_{zz} + p \cdot q \cdot (I_{yy} \dots \end{bmatrix}$$

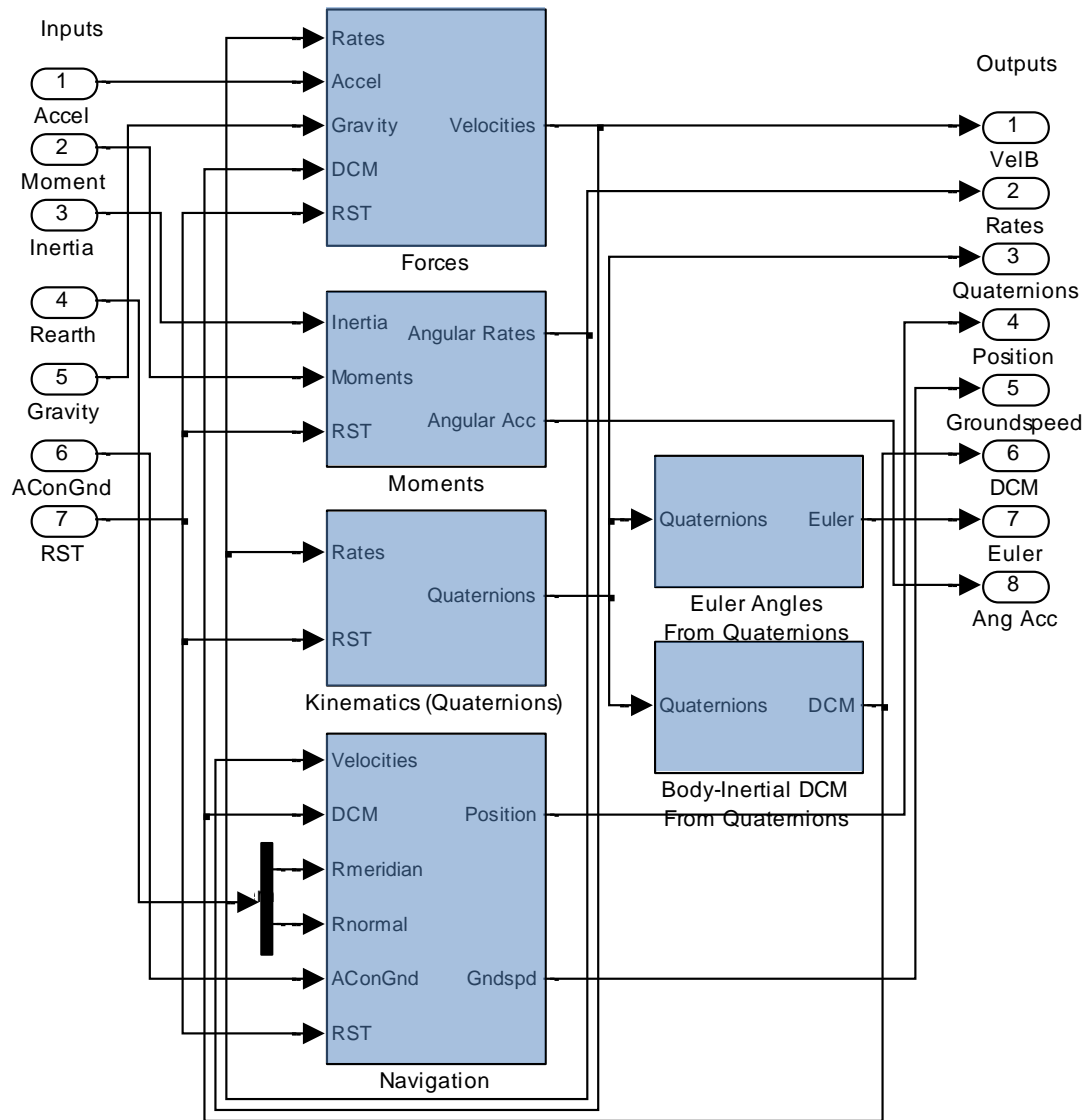
◦ quaterniony

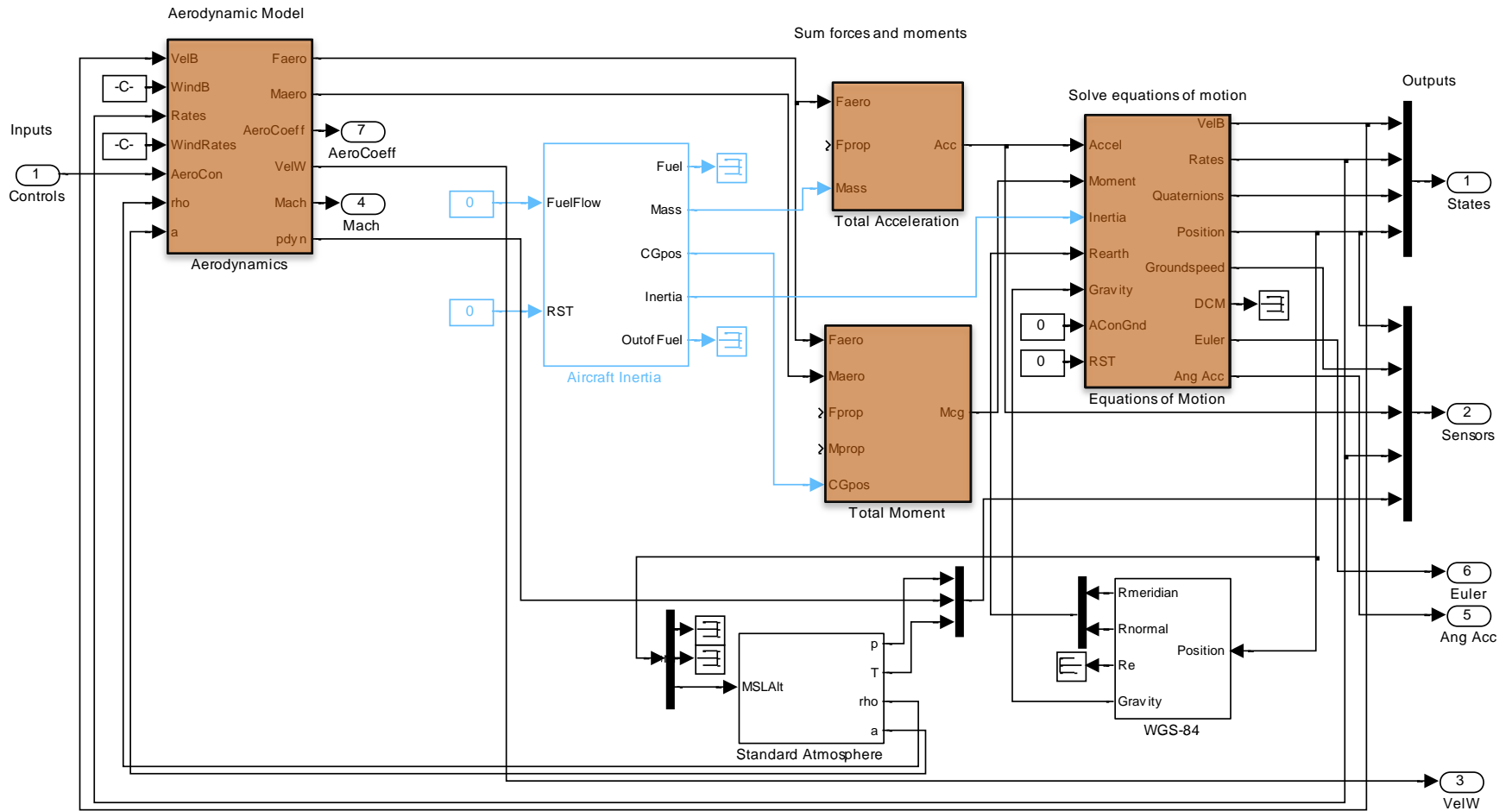
◦ eulerovy úhly

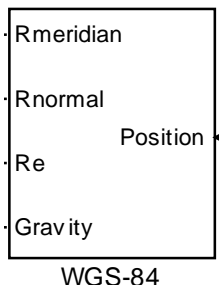
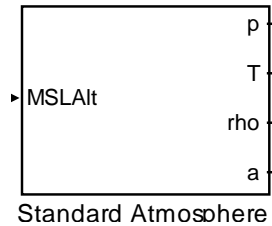
◦ transformace na letadlovou soustavu

◦ výpočet pozice v zemské souřadné soustavě

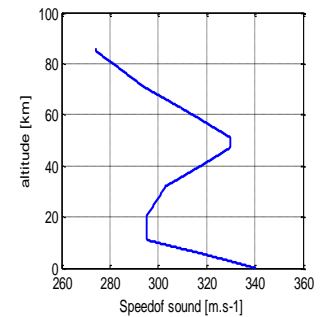
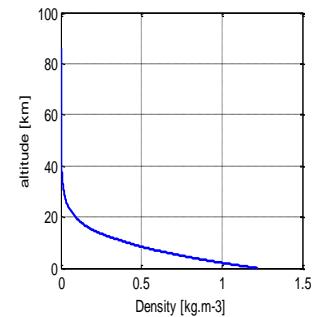
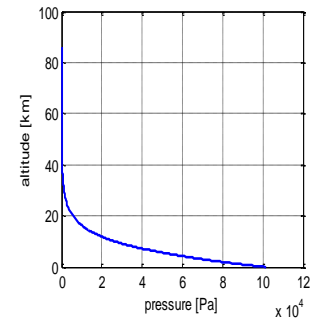
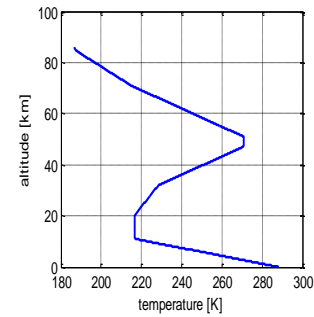


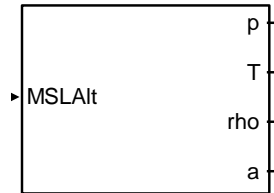




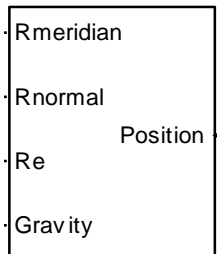


- Standardní atmosféra interpolace teploty, tlaku, hustoty a rychlosti zvuku podle výšky
- Geoid WGS-84 výpočet lokálního rádiu země





Standard Atmosphere



WGS-84



NELINEÁRNÍ MODEL LETADLA

ZÁVĚR

Co si zapamatovat

- postup odvození (základní rovnice, složkový tvar, aerodynamické síly a momenty)
- odvození polohových úhlů a úhlů ofukování
- linearizace aerodynamických koeficientů – aerodynamické derivace

